CAPESA 2008
Concours Externe

Solution proposée par Gaëtan Michel
gaetan.michel33@gmail.com

Partie A

1.a. Soient $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$

$b = \text{barycentre}\{(a,\lambda),(c,1-\lambda)\} \iff b = \lambda a + (1-\lambda)c$

$\iff \boxed{\lambda = \dfrac{c-b}{c-a}} \in]0,1[\quad \left(1-\lambda = \dfrac{b-a}{c-a} \in]0,1[\right).$

1.b. La convexité de f sur I s'écrit :

$f(b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$. On en déduit :

$f(b) - f(a) \leqslant (1-\lambda)(f(c) - f(a))$

$f(c) - f(b) \geqslant \lambda (f(c) - f(a))$. Donc :

$$\frac{f(b)-f(a)}{1-\lambda} \leqslant f(c)-f(a) \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{\lambda} \quad \text{càd.}$$

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}}$$

1.c. Soient $a, b, c, d \in I$ tels que $a < b < c < d$.

Comme ci-dessus on écrit que $c = \text{bar}\{(b,\mu),(d,1-\mu)\}$

Alors : $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} \leqslant \dfrac{f(d)-f(b)}{d-b} \leqslant \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}$

Tenant compte de 1.b., ces inégalités impliquent

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leqslant \frac{f(d)-f(c)}{d-c}}$$

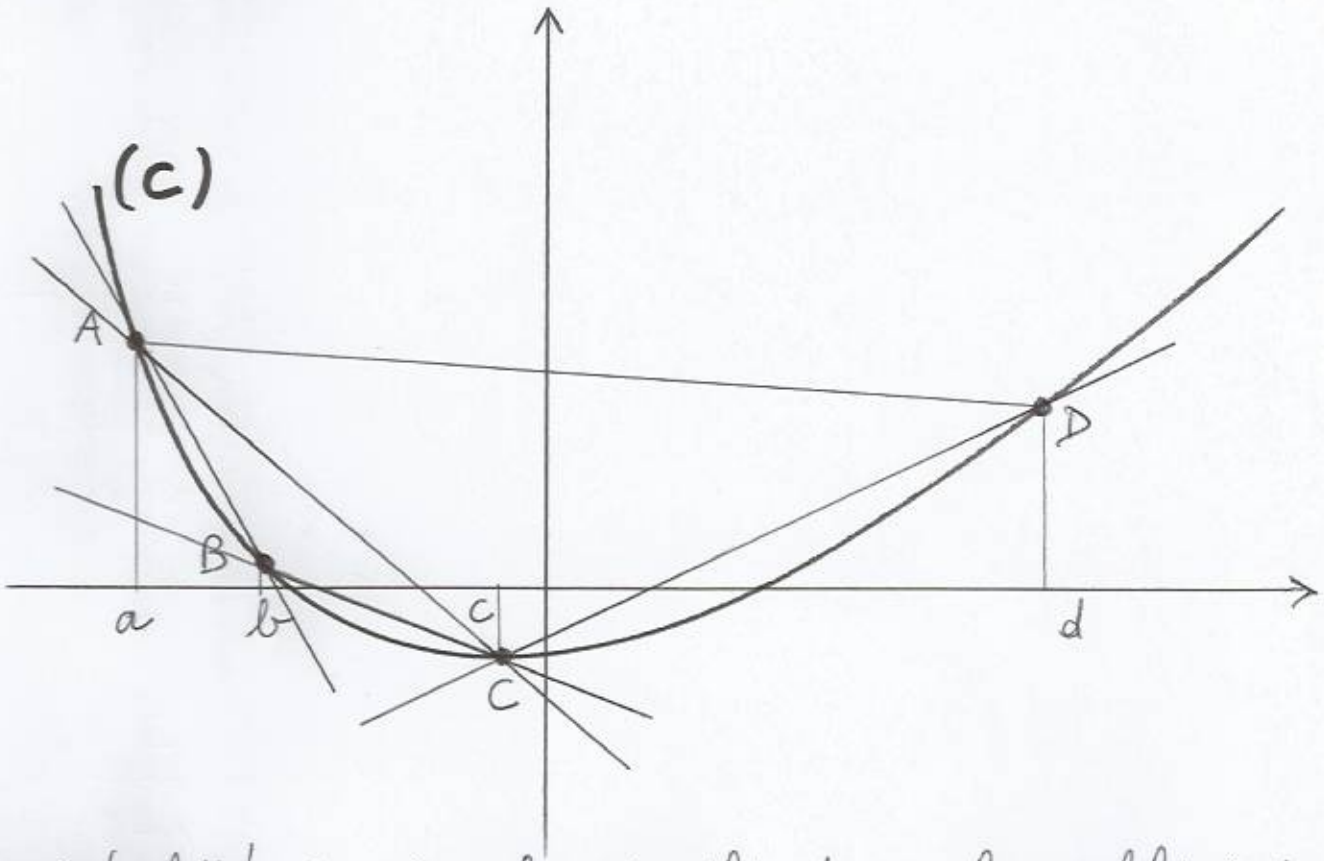
et avec $c = \text{bar}\{(a,\alpha),(d,1-\alpha)\}$, on obtient en particulier :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(d)-f(a)}{d-a}$$

Tenant compte de 1. b., il vient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(d)-f(a)}{d-a}$$

1. d.



Les inégalités du A-1.b signifient que le coefficient directeur de la droite (AC) est compris entre celui de la droite (AB) et celui de la droite (BC).

Les inégalités du A-1.c donnent également un encadrement de la pente des droites (BC) et (AC).

1. e. Je démontre d'abord que $\varphi : I \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$ est croissante. $(x \in I)$

Soit donc $x \in I$ et a, b dans $I \setminus \{x\}$ tels que $a < b$.

Je distingue 3 cas :

- Si $x < a < b$ on a bien $\varphi_x(a) \leqslant \varphi_x(b)$ grâce à la première inégalité de A-1.b.
- Si $a < b < x$ on raisonne de même.

• Si $a < x < b$ on a :

$\tau_x(a) = \tau_a(x) \leq \tau_a(b) = \tau_b(a)$

et avec le premier cas

$\tau_b(a) \leq \tau_b(x) = \tau_x(b)$ donc : $\tau_x(a) \leq \tau_x(b)$

τ_x est bien croissante sur $I \setminus \{x\}$.

Soit $x_0 \in \mathring{I}$ (intérieur de I) et $(a,b) \in I^2$ tels que $a < x_0 < b$. La croissance de τ_{x_0} donne : $\tau_{x_0}(a) \leq \tau_{x_0}(b)$. Alors le théorème de la limite monotone assure l'existence de :

$\lim_{\substack{t \to x_0 \\ <}} \tau_{x_0}(t) = f'_g(x_0)$ et $\lim_{\substack{t \to x_0 \\ >}} \tau_{x_0}(t) = f'_d(x_0)$

f admet une dérivée à gauche et à droite en tout $x_0 \in \mathring{I}$

f est donc continue à gauche et à droite en tout $x_0 \in \mathring{I}$

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathring{I}}$$

2. a. i. Soient $b, c \in \mathring{I}$ tels que $b < c$ et x tel que $b < x < c$. La croissance de τ_x sur $[b,c] \setminus \{x\}$ donne :

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leq \frac{f(c)-f(x)}{c-x}$$

quand on fait tendre x vers b, le passage à la limite dans l'inégalité précédente donne :

$$f'(b) \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$, et quand $x \mapsto c$:

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leq f'(c)$$

Donc :

$$\boxed{f'(b) \leq f'(c)}$$

Ainsi f convexe sur $I \Rightarrow f'$ positive sur $\mathring{I}$

2.a.ii Si I est un intervalle ouvert, alors le résultat est acquis d'après ce qui précède.

Supposons I non ouvert, par exemple $I=]a;b]$ $(a<b)$. On sait déjà que f' est croissante sur $]a,b[$ et f'' est positive sur $]a,b[$, Comme f est deux fois dérivable sur I, alors f' est continue à gauche en b; elle est croissante sur $]a,b]$ et donc $f''(b)\geqslant 0$. Les cas $I=[a,b]$ et $I=[a,b[$ se traitent de la même façon. Donc!

$$\boxed{f \text{ convexe sur un intervalle } I \Rightarrow f'' \geqslant 0 \text{ sur } I}$$

2.b.i soient $a,b,c \in I$ tels que $a<b<c$.
f étant supposée dérivable deux fois sur I, elle est en particulier continue sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$ et dérivable sur $]a,b[$ et sur $]b,c[$.
Le théorème des accroissements finis s'applique:

$\exists \alpha \in]a,b[$ tel que : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\alpha)$

$\exists \beta \in]b,c[$ tel que : $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'(\beta)$

or f'' est également supposée positive sur I :

$\alpha<\beta \Rightarrow f'(\alpha) \leqslant f'(\beta)$ càd:

$$(I) \quad \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}}$$

ii. $b \in]a,b[\iff \exists\, \lambda \in]0,1[\;/\; b=\lambda a+(1-\lambda)c$

$\lambda = \dfrac{c-b}{c-a}$ et $1-\lambda = \dfrac{b-a}{c-a}$

Donc (I) (Inégalité précédente)

$$\iff f(b)-f(a) \leqslant \frac{1-\lambda}{\lambda}(f(c)-f(b))$$

$$\iff f(\lambda a+(1-\lambda)c) \leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda) f(c)$$

Ceci valant pour tout $a, c \in I$ et donc pour tout $\lambda \in]0,1[$, on retrouve bien la définition d'une fonction convexe sur un intervalle I (cf Rappels)

Donc : | $f'' \geqslant 0$ sur $I \Rightarrow f$ convexe sur I |

Finalement | f convexe sur $I \iff f'' \geqslant 0$ sur I |

3. Je raisonne par l'absurde en supposant :
$\exists x, y, z \in]0;1]$ avec $x<y<z$ et $U(y)>U(z)$
Puisque U est convexe sur $[0,1]$ la première propriété de A-1.c donne :

$$\frac{U(x)-U(0)}{x-0} \leqslant \frac{U(y)-U(x)}{y-x} \leqslant \frac{U(z)-U(y)}{z-y}$$

Par passage à la limite $x \to 0^{>}$, il vient :

$$0 = U'_d(0) \leqslant \frac{U(z)-U(y)}{z-y} < 0 \text{ : Absurde}$$

Ainsi $0<y<z \leqslant 1 \Rightarrow U(z) \geqslant U(y)$
U est donc croissante sur $]0,1]$ et finalement sur $[0,1]$ puisque $U'_d(0)=0$.

| U est croissante sur $[0,1]$ |

Partie B

1. a. Le domaine de définition et de continuité de φ est $[-1;1]$, c'est celui de $t \mapsto \arccos t$ et de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$.

b. $t \mapsto \arccos t$ et $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ sont dérivables sur $]-1;1[$. Il en est de même pour φ.

φ est dérivable sur $]-1;1[$

Tenant compte de $\arccos'(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ pour $|t|<1$, on obtient facilement : pour tout $t \in]-1;1[$

$$\varphi'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + 1 = \boxed{\frac{t-1+\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} = \varphi'(t) \quad t \in]-1;1[}$$

c. On a une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Pour la lever, on applique le théorème des accroissements finis à φ sur $]-1,t[$ ou $]t;-1[$ et sur $]t;1[$ avec $0<t<1$, ce qui est loisible d'après a. et b.

$\exists\, c \in]-1,t[$ tel que $\varphi(t)-\varphi(-1) = (t+1)\varphi'(c)$

Alors $$\frac{\varphi(t)-\varphi(-1)}{t+1} = \frac{c-1+\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{-\sqrt{1-c}}{\sqrt{1+c}} + 1$$

Alors $\lim\limits_{\substack{t\to -1 \\ t>-1}} \dfrac{\varphi(t)-\varphi(-1)}{t+1} = \lim\limits_{\substack{c\to -1 \\ c>-1}} 1 - \dfrac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{1+c}} = -\infty$

De même $\lim\limits_{\substack{t\to 1 \\ t<1}} \dfrac{\varphi(t)-\varphi(1)}{t-1} = \lim\limits_{\substack{d\to 1 \\ d<1}} 1 - \dfrac{\sqrt{1-d}}{\sqrt{1+d}} = 1$

d. D'après ce qui précède le domaine de dérivabilité de φ est $]-1;1]$

e. $\varphi'(t)$ est du signe de son numérateur.

sur $]-1;1]$ $1-t \geqslant 0$ donc : $\varphi'(t) \geqslant 0 \iff \sqrt{1-t^2} \geqslant 1-t$

$\iff 1-t^2 \geqslant 1-2t+t^2 \iff t(1-t) \geqslant 0 \iff t \geqslant 0$

Donc $\boxed{\varphi'(t) \geqslant 0 \iff t \in [0,1] \quad \varphi'(t) \leqslant 0 \iff t \in]-1;0]}$

On en déduit le tableau de variations de φ :

t	-1		θ		0		1
$\varphi'(t)$	‖	‖	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	‖	$\pi-2$		↘	$\frac{\pi}{2}-2$	↗	0
	‖		0				

2a. Sur $[-1;0]$ φ est continue et strictement décroissante. De plus $\varphi(-1)>0$ et $\varphi(0)<0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure de l'existence et de l'unicité de θ tel que $\varphi(\theta)=0$. Comme φ est strictement négative sur $[0,1[$ d'après le tableau de variations, on a bien :

Il existe un unique nombre $\theta \in [-1;1[$ tel que $\varphi(\theta)=0$

b. Avec la calculatrice, on obtient :

$\varphi(-0{,}745) \approx -0{,}000733297$

$\varphi(-0{,}7455) \approx 0{,}000075408$

Donc $\varphi(-0{,}745) < \varphi(\theta) < \varphi(-0{,}7455)$

et par décroissance stricte de φ sur $[-1;0]$

on obtient $-0{,}7455 < \theta < -0{,}745$

soit $-745{,}5 < 1000\,\theta < -745$

$-745 - \frac{1}{2} < 1000\,\theta < -745 + \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre $\boxed{N = -745}$

c. $N - \frac{1}{2} \leqslant 1000\,\theta < N + \frac{1}{2} \iff 0 \leqslant \theta - \frac{1}{1000}\left(N - \frac{1}{2}\right) < 10^{-3}$

L'arrondi décimal de θ à 10^{-3} est donc $-0{,}745$

3.a. f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0,1]$. On sait alors que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f([0,1]) = [0,1]$.

Par définition de f et g : $\forall y \in [0,1]\ f(g(y)) = y$

D'autre part f est dérivable sur $]0,1[$ puisqu'elle vérifie l'équation différentielle des conditions (I). De plus f' ne s'annule pas sur $]0,1[$ puisque f est strictement décroissante. Ainsi g est aussi dérivable sur $]0,1[$. On peut donc écrire $\forall y \in]0,1[\ f'(g(y)) \times g'(y) = 1$.

Comme $\forall y \in]0,1[\ f(g(y)) \neq 1$, l'équation différentielle des conditions (I) donne :

$$\forall y \in]0,1[\ f'^2(g(y)) = \frac{2C - 1 + g(f(y))}{1 - f(g(y))} = \frac{2C - 1 + y}{1 - y}$$

d'où
$$\boxed{\forall y \in]0,1[\ (g'(y))^2 = \frac{1}{f'^2(g(y))} = \frac{1-y}{2C-1+y}}$$

On a successivement, pour tout y dans $]0,1[$

$$(g'(y))^2 = \frac{(1-y)^2}{(1-y)(2C+y-1)} = \frac{(1-y)^2}{c^2\left(1 - \frac{y-1+c}{c}\right)\left(1 + \frac{y-1+c}{c}\right)}$$

$$= \frac{(1-y)^2}{c^2\left(1 - \left(\frac{y-1+c}{c}\right)^2\right)}$$

Comme g est strictement décroissante sur $]0,1[$ (même monotonie que sa réciproque) $g'(y) < 0$, on a :

$$\boxed{\forall y \in]0,1[\ g'(y) = \frac{y-1}{c\sqrt{1 - \left(\frac{y-1+c}{c}\right)^2}}}$$

b. Pour $y \in]0,1[$, il suffit de dériver l'expression donnée de g. On peut remarquer que :

$$g(y) = C\varphi\left(\frac{y-1+c}{c}\right) + K + 1 - y$$

donc $g'(y) = C\varphi'\left(\frac{y-1+c}{c}\right) \times \frac{1}{c} - 1$

donc $g'(y) = \dfrac{c\left(\frac{y-1+c}{c} - 1\right)}{c\sqrt{1-\left(\frac{y-1+c}{c}\right)^2}} = \boxed{\dfrac{y-1}{c\sqrt{1-\left(\frac{y-1+c}{c}\right)^2}} = g'(y)}$

$y \in]0,1[$

c. Supposons qu'il existe une fonction f satisfaisant aux conditions (I). Elle admet une fonction réciproque qui est continue sur $[0,1]$ comme f.
Or $g(1) = g(f(0)) = 0$. Donc nécessairement :

$$\lim_{y \to 1} c\left(\arccos\frac{y-1+c}{c} - \sqrt{1-\left(\frac{y-1+c}{c}\right)^2}\right) + K = 0$$

càd $\underline{K = 0}$. Ceci définit $\underline{g}$ et donc f de manière unique. Par construction on a aussi nécessairement $g(0) = g(f(1)) = 1$. D'où la condition :

$$\lim_{y \to 0} c\left(\arccos\frac{y-1+c}{c} - \sqrt{1-\left(\frac{y-1+c}{c}\right)^2}\right) = 1$$

Donc : $\arccos\frac{c-1}{c} - \sqrt{1-\left(\frac{c-1}{c}\right)^2} = \frac{1}{c} = 1-\left(\frac{c-1}{c}\right)$

càd $\varphi\left(\frac{c-1}{c}\right) = 0 = \varphi(0)$

Comme $\frac{c-1}{c} \neq 1$, $\frac{c-1}{c}$ est l'unique réel de $[-1,1[$ qui annule φ. D'où $\boxed{\frac{c-1}{c} = 0} \iff c = \frac{1}{1-\theta}$

L'arrondi décimal de c à 10^{-3} près est $0,573 > \frac{1}{2}$

4. D'après l'analyse faite à la question précédente, si f satisfait aux conditions (I), alors la réciproque g est définie sur $]0,1[$ par :

$$g(y) = c\left(\arccos\frac{y-1+c}{c} - \sqrt{1-\left(\frac{y-1+c}{c}\right)^2}\right)$$

càd avec $c = \frac{1}{1-\theta}$ par :

$$y \longmapsto \frac{\arccos(\theta + y(1-\theta)) - \sqrt{1-(\theta+y(1-\theta))^2}}{1-\theta}$$

a. γ est définie, continue sur $[0,1]$ avec :

$$\gamma(0) = \frac{\arccos\theta - \sqrt{1-\theta^2}}{1-\theta} = 1 \quad \text{(par définition de } \theta\text{)}$$

$$\gamma(1) = \frac{\arccos 1}{1-\theta} = 0$$

D'autre part : $\theta + y(1-\theta) = 1 \iff y = 1$

donc γ est dérivable sur $[0,1[$ et $\forall y \in [0,1[$

$$\gamma'(y) = \frac{(1-\theta)(y-1)}{\sqrt{1-(\theta+y(1-\theta))^2}} < 0 \quad \text{(cf B-3.a)}.$$

Pour étudier $\lim\limits_{\substack{y\to 1 \\ y<1}} \gamma'(y)$, je pose $h = \theta + y(1-\theta)$

alors $y = \dfrac{h-\theta}{1-\theta}$ et $(1-\theta)(y-1) = h-1$. Ainsi

$$\lim_{\substack{y\to 1 \\ y<1}} \gamma'(y) = \lim_{\substack{h\to 1 \\ h<1}} \frac{h-1}{\sqrt{1-h^2}} = \lim_{\substack{h\to 1 \\ h<1}} \frac{-\sqrt{1-h}}{\sqrt{1+h}}$$

Nécessairement h tend vers 1 par valeurs inférieures

car $h > 1 \iff y > 1$

Finalement $\lim\limits_{\substack{y\to 1 \\ y<1}} \gamma'(y) = 0^-$.

Le théorème de prolongement des fonctions dérivables assure que :

$\boxed{\gamma \text{ est dérivable sur } [0,1]}$

avec $\gamma'(1) = 0$

La continuité de γ sur $[0,1]$, sa stricte décroissance sur $[0,1[$ et les égalités $\gamma(0)=1, \gamma(1)=0$ permettent d'affirmer que :

$\boxed{\gamma \text{ réalise une bijection de } [0,1] \text{ sur } [0,1]}$

b. La fonction Λ est dérivable en y si et seulement si $\Lambda(y)$ n'annule pas la dérivée de γ, càd ssi $\Lambda(y) \neq 1$. Or $\Lambda(y)=1 \Rightarrow y = \gamma(\Lambda(y)) = \gamma(1) = 0$

Donc $\boxed{\Lambda \text{ est dérivable sur }]0,1]}$.

Λ est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$ avec $\lim_{y\to 0} \Lambda'(y) = -\infty$ d'après B-4.a

$\Lambda(0) = \Lambda(\gamma(1)) = 1$ et $\Lambda(1) = \Lambda(\gamma(0)) = 0$

$$\forall y \in]0,1[\quad \gamma'(\Lambda(y)) \times \Lambda'(y) = 1$$

Donc : $\forall y \in]0,1[\quad (\Lambda'(y))^2 = \dfrac{1}{(\gamma'(\Lambda(y))^2} = \dfrac{2C + \Lambda(y) - 1}{1 - \Lambda(y)}$

et $\forall y \in]0,1[\quad (1-\Lambda(y))(\Lambda'(y))^2 = 2C + \Lambda(y) - 1$

$$1 - \Lambda(y) > 0 \Rightarrow C > \frac{1-\Lambda(y)}{2}$$

cette dernière inégalité doit valoir pour tout $y \in]0,1[$ donc pour tout $\Lambda(y) \in]0,1[$. Et donc :

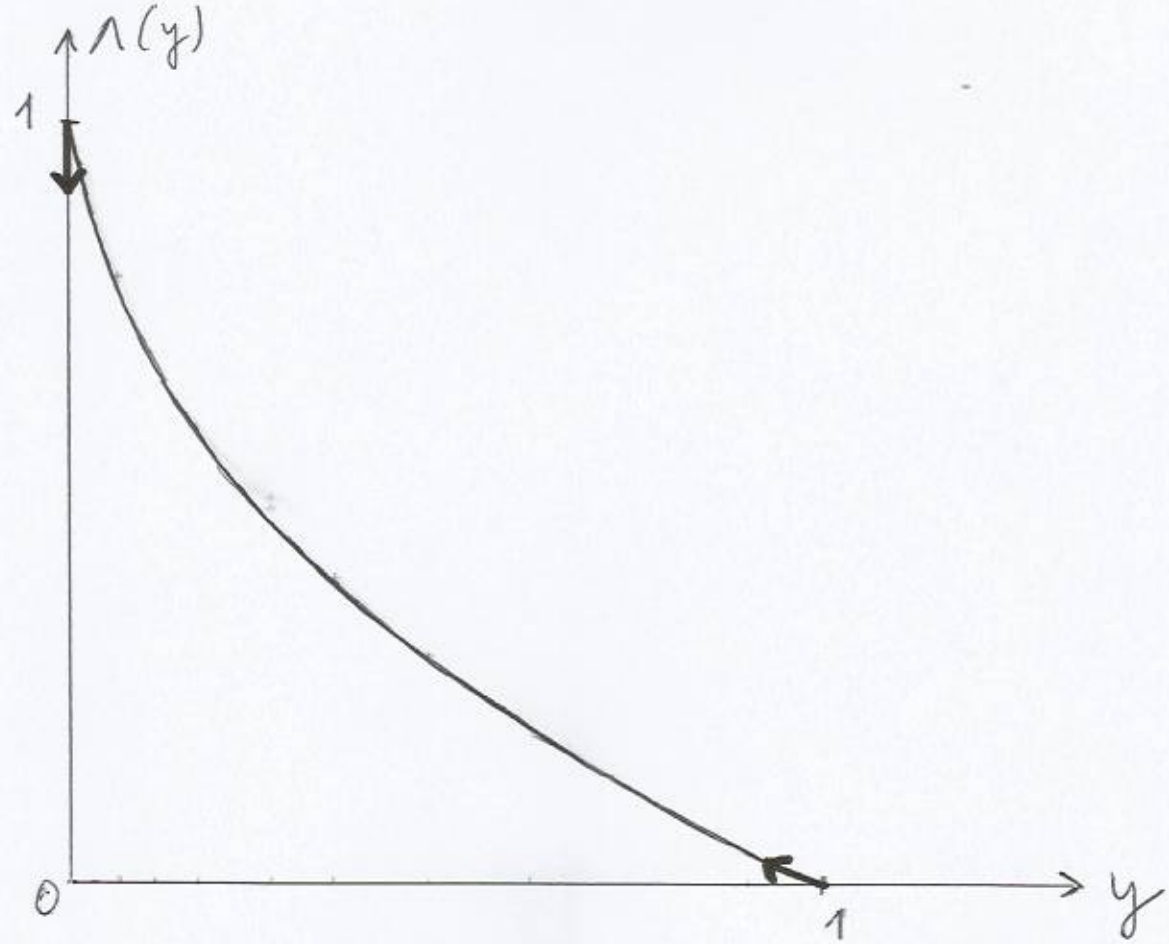
$\boxed{C \geqslant \frac{1}{2}}$

Ainsi : $\boxed{\Lambda \text{ satisfait aux conditions (I)}}$

c. On connaît la pente des tangentes en $(0,1)$: $-\infty$ et en $(1,0)$: $\Lambda'(1) = \dfrac{1}{\gamma'(0)} = \dfrac{\sqrt{1-0^2}}{0-1} \simeq -0{,}4$

En utilisant l'identité $\lambda(\gamma(y)) = y \quad \forall y \in [0,1]$
on dresse un tableau de valeurs (approximatives)

y	0,06	0,11	0,17	0,26	0,35	0,47	0,61
$\lambda(y)$	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2



Partie C

1. a. A l'instant $t = 0$, le point M est en $(0,1)$.
Pour $\theta \in [-1;1[$ $\cos(\arccos\theta) = \theta$ et
$\sin(\arccos\theta) = \sqrt{1-\theta^2}$. On en déduit qu'à l'instant $t = t_\theta = \arccos\theta$, le point M est en :
$\left(\frac{\arccos\theta - \sqrt{1-\theta^2}}{1-\theta} ; \frac{-\theta+\theta}{1-\theta}\right)$ càd en $(1;0)$
(par définition $\varphi(\theta) = 0$).

b. Soit $t \in \mathbb{R}$ on a : $\begin{cases} u(t+2\pi) = u(t) + \dfrac{2\pi}{1-\theta} \\ v(t+2\pi) = v(t) \end{cases}$

La trajectoire de M est donc globalement invariante dans la translation de vecteur $\dfrac{2\pi}{1-\theta}\vec{i}$

$\begin{cases} u(-t) = -u(t) \\ v(-t) = v(t) \end{cases}$

La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées laisse aussi la trajectoire de M globalement invariante.

Grâce à la première transformation, on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, 2\pi]$ puis à $[0, \pi]$ avec la deuxième. Pour tracer la trajectoire, il suffira de construire l'arc symétrique /(Oy) de celui obtenu avec $t \in [0, \pi]$ puis d'effectuer des translations de vecteur égal environ à $3{,}6\,\vec{i}$.

c. M est un point singulier si $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{0}$. d'où les conditions $1 - \cos t = -\sin t = 0 \iff t = (0 + 2k)\pi$

on obtient ainsi les points $\left(\dfrac{2k\pi}{1-\theta} ; 1\right)$ $k \in \mathbb{Z}$.

Comme points singuliers de la trajectoire.

d. Avec pour $t \in [0, \pi]$

$$u'(t) = \frac{1-\cos t}{1-\theta}$$

$$v'(t) = \frac{-\sin t}{1-\theta}$$

on obtient facilement le tableau de variations ci-contre :

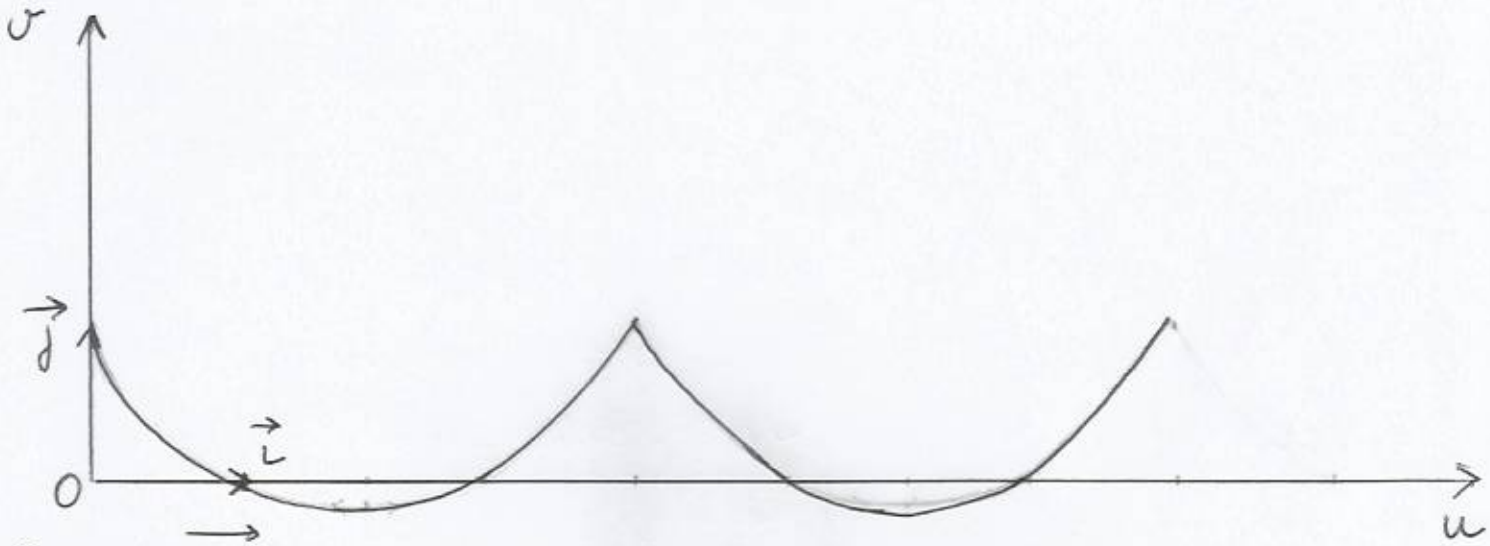
t	0		t_0		π
$u'(t)$	0	$+$			δ
$u(t)$	0	↗	1	↗	α
$v(t)$	1	↘	0	↘	β
$v'(t)$	0	$-$			0

avec $\alpha = \dfrac{\pi}{1-\theta}$ et $\beta = \dfrac{-(1+\theta)}{1-\theta}$ $\delta \neq 0$

e. Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{v'(t)}{u'(t)} = \frac{-\sin t}{1-\cos t} \underset{0}{\sim} \frac{-t}{t^2/2} = \frac{-2}{t}$$

Aux points singuliers, on a donc une tangente verticale. Les points $\left(\frac{2k\pi}{1-\theta} ; 1\right)$ sont des points $k \in \mathbb{Z}$ de rebroussement de première espèce pour raison de symétrie / (oy). D'où le tracé sommaire de la trajectoire de M entre $t = 0$ et $t = 4\pi$



2a. $\frac{d\overrightarrow{O\Omega}}{dt} = \frac{1}{1-\theta}\vec{i}$ Le mouvement de Ω dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est rectiligne (la trajectoire de Ω est incluse dans la droite parallèle à $(O, \vec{i})$ d'équation $y = \frac{-\theta}{1-\theta}$) et uniforme (la vitesse de Ω est constante).

b. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM}$

d'où $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{1-\theta}(-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j})$ et :

$$\frac{d\overrightarrow{\Omega M}}{dt} = \frac{1}{1-\theta}(-\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j})$$

On a $\Omega M^2 = \frac{1}{(1-\theta)^2}$: M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω et de rayon $\frac{1}{1-\theta}$ (dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$).

3. D'après ce qui précède :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O\Omega}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\Omega M}}{dt} = \frac{1}{1-\theta}\left((1-\cos t)\vec{i} - \sin t\,\vec{j}\right).$$

Les points de contact du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\mathcal{D})$ sont donnés par les $t \in \mathbb{R}$ tels que : $\frac{-\theta}{1-\theta} = \frac{-\theta+\cos t}{1-\theta}$ càd $t = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. En ces points, la vitesse $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ est nulle. Cela indique que le point M du cercle $(\mathcal{C})$ roule sans glisserent sur $(\mathcal{D})$.

Soit $x = \frac{t - \sin t}{1-\theta}$ et $y = \frac{-\theta+\cos t}{1-\theta}$ pour $t \in \mathbb{R}$

$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1 \Rightarrow -1-\theta \leqslant \cos t - \theta \leqslant 1-\theta \Rightarrow y \in [-0{,}146\,;\,1]$

A fortiori $y \in [0,1]$ avec $\cos t = \theta + y(1-\theta)$. D'où

$$x = \frac{\arccos(\theta+y(1-\theta)) - \sqrt{1-(\theta+y(1-\theta))^2}}{1-\theta} = \gamma(y) \qquad y \in [0,1].$$

Cette égalité est équivalente à $y = \Lambda(x)$. Ainsi la courbe représentative de Λ est un arc de cycloïde.

Partie D.

1. $\Psi(u,v)$ est une fraction ; elle est donc définie en tout point (u,v) de $\mathbb{R}^2$ où son dénominateur existe et ne s'annule pas. C'est la condition nécessaire et suffisante : $1-v > 0$. Le domaine de définition de Ψ est donc $\mathbb{R} \times]-\infty\,;1[$.

Comme : $\forall u \in \mathbb{R}$ $1+u^2 > 0$, on constate que sur $\mathbb{R} \times]-\infty\,;1[$, Ψ est même de classe C^1

On en déduit que sur $\mathbb{R} \times]-\infty ; 1[$, $\bar{\Psi}$ admet des dérivées partielles (continues) $\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial v}$; $\forall (u,v) \in \mathbb{R} \times]-\infty ; 1[$:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial u}(u,v) = \frac{2u}{2\sqrt{1+u^2}\sqrt{1-v}} = \boxed{\frac{u\,\bar{\Psi}(u,v)}{1+u^2} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial u}(u,v)}$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial v}(u,v) = \frac{\sqrt{1+u^2}}{2(1-v)\sqrt{1-v}} = \boxed{\frac{\bar{\Psi}(u,v)}{2(1-v)} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial v}(u,v)}$$

$(u,v) \longmapsto \ln(\bar{\Psi}(u,v))$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times]-\infty ; 1[$, comme composée de telles fonctions.

et $\forall (u,v) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 1[$:

$$\frac{\partial \ln \circ \bar{\Psi}}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{\bar{\Psi}(u,v)} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial u}(u,v) = \boxed{\frac{u}{1+u^2} = \frac{\partial \ln \circ \bar{\Psi}}{\partial u}(u,v)}$$

$$\frac{\partial \ln \circ \bar{\Psi}}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{\bar{\Psi}(u,v)} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial v}(u,v) = \boxed{\frac{1}{2(1-v)} = \frac{\partial \ln \circ \bar{\Psi}}{\partial v}(u,v)}$$

2. a.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b < 1$. w est une fonction continue sur $[0,1]$ donc aussi en particulier en a et en b. $w(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} w(x) = 0$; $w(b) = \lim_{\substack{x \to b \\ x > b}} w(x) = 0$ puisque $w = 0$ hors de $[a,b]$.

Ainsi $\boxed{w(a) = 0 = w(b)}$.

b. Cela résulte facilement du caractère C^2 de f et de w sur $]0,1[$ et des théorèmes généraux sur la somme et la composée de fonctions C^1.

c. Soit $x \in [a,b]$, il suffit d'établir l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :

$|t| < \eta \Rightarrow 0 < 1 - (f(x) + t\,w(x)) < 1$ càd

$|t| < \eta \Rightarrow 0 < f(x) + t\,w(x) < 1$. Or d'après la question précédente, les fonctions :

$(x,t) \longmapsto f(x) + t\,w(x)$ sont $\mathcal{C}^1$ et à fortiori continues sur $]0,1[\times \mathbb{R}$. Il suffit de choisir $\varepsilon = 1$ dans la définition de la continuité de ces fonctions pour prouver l'existence de $\eta > 0$. Comme $0 < a < b < 1$:

$\exists\, \eta > 0$ tel que Θ soit définie et C^1 sur $[a,b] \times [-\eta, \eta]$

Le caractère C^1 de Θ assure l'existence de $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$; d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée : $\forall\, (x,t) \in [a,b] \times [-\eta, \eta]$.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \Psi}{\partial u}(f'(x) + t\,w'(x),\ f(x) + t\,w(x)) \times w'(x) + \frac{\partial \Psi}{\partial v}(f'(x) + t\,w'(x),\ f(x) + t\,w(x)) \times w(x)$$

Soit :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}(x,t) = (f'(x) + t\,w'(x)) \frac{\Psi(f'(x) + t\,w'(x),\ f(x) + t\,w(x))}{1 + (f'(x) + t\,w'(x))^2} w'(x) + \frac{\Psi(f'(x) + t\,w'(x),\ f(x) + t\,w(x))}{2\,(1 - (f(x) + t\,w(x))} w(x)$$

En particulier pour $x \in [a,b]$ et $0 \in [-\eta; \eta]$.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}(x,0) = \frac{f'(x)\,\Psi(f'(x), f(x))}{1 + f'^2(x)} w'(x) + \frac{\Psi(f'(x), f(x))}{2\,(1 - f(x))} w(x)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,0) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}\sqrt{1-f(x)}}\,w'(x) + \frac{\sqrt{1+f'^2(x)}}{2\sqrt{1-f(x)}\,(1-f(x))}\,w(x)$$

Le membre de droite est bien de la forme $Aw' + Bw$ avec : $\forall x \in [a,b]$, $A(x) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}\sqrt{1-f(x)}}$ et $B(x) = \dfrac{\sqrt{1+f'^2(x)}}{2(1-f(x))^{3/2}}$

d. Par définitions de Φ et de ψ, on a pour tout $|t|<\eta$

$$\Phi(f+tw) - \Phi(f) = \int_0^1 \big(\psi(f'(x)+tw'(x), f(x)+tw(x)) - \psi(f'(x), f(x)) \big)\, dx.$$

On découpe l'intervalle d'intégration $[0,1]$ en : $[0,1] = [0,a] \cup [a,b] \cup [b,1]$. Mais w est nulle en dehors de $[a,b]$, d'où : pour tout $t \in [-\eta, \eta]$

$$\Phi(f+tw) - \Phi(f) = \int_a^b \big(\psi(f'(x)+tw'(x), f(x)+tw(x)) - \psi(f'(x), f(x)) \big)\, dx$$

d'après la relation de Chasles pour les intégrales.

Finalement $\boxed{\phi(f+tw) - \phi(f) = \int_a^b [\theta(x,t) - \theta(x,0)]\, dx \quad |t|<\eta}$

e. Par définition de la dérivée partielle (θ est C^1 sur $[a,b]\times[-\eta,\eta]$) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\theta(x,t)-\theta(x,0)}{t} = \dfrac{\partial\theta}{\partial t}(x,0)$

De plus $x \mapsto \dfrac{\partial\theta}{\partial t}(x,0)$ est continue sur $[a,b]$; on peut donc considérer $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial\theta}{\partial t}(x,0)\, dx$. Autrement dit

l'intégrale (1) $\displaystyle\int_a^b \lim_{t\to 0} \frac{\theta(x,t)-\theta(x,0)}{t}\, dx$

existe.

$t \mapsto \int_a^b \frac{\Theta(x,t)-\Theta(x,0)}{t}\,dx$ est définie et continue sur $[-\eta,\eta]$ par application du théorème de continuité sous le signe somme (intégrale dépendant d'un paramètre sur un segment). Cette continuité légitime l'interversion de la limite et du signe somme dans (1). Ainsi :

$$\int_a^b \frac{\partial\Theta}{\partial t}(x,0)\,dx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_a^b (\Theta(x,t)-\Theta(x,0))\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\phi(f+t\omega)-\phi(f)\right)$$

Avec l'expression de $\frac{\partial\Theta}{\partial t}(x,0)$ de 2.c, on a :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\phi(f+t\omega)-\phi(f)}{t} = \int_a^b (A(x)\omega'(x)+B(x)\omega(x))\,dx$$

On transforme cette intégrale avec une intégration par parties, ce qui est loisible car ω est C^2 sur $]0,1[$ donc sur $[a,b]$. A est C^1 sur $[a,b]$ car sur cet intervalle $0<f(x)<1$.

Pour $\int_a^b A(x)\omega'(x)\,dx$, on pose avec les notations usuelles $u'=\omega'$; $u=\omega$

et $v=A$; $v'=\frac{dA}{dx}$

Alors : $\int_a^b A(x)\omega'(x)\,dx = \left[A(x)\omega(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{dA(x)}{dx}\omega(x)\,dx$

soit $\int_a^b A(x)\omega'(x)\,dx = -\int_a^b \frac{dA(x)}{dx}\omega(x)\,dx$

puisque $\omega(a)=\omega(b)=0$

Donc : $\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\phi(f+tw)-\phi(f)}{t} = \int_a^b \left(B(x) - \frac{dA}{dx}(x)\right) w(x)\,dx}$

f. Supposons que $\lim_{t\to 0} \frac{\phi(f+tw)-\phi(f)}{t} = \ell$ et $\ell \neq 0$

Alors $\phi(f+tw)-\phi(f) \underset{0}{\sim} \ell t > 0$. En effet : $f \in E \Rightarrow f+tw \in E$ et la condition iii de la partie D s'écrit $\phi(f+tw)-\phi(f) \geqslant 0$. Alors : $t>0 \Rightarrow \ell > 0$ et $t<0 \Rightarrow \ell < 0$ - C'est absurde et nécessairement $\ell = 0$, c.à.d.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi(f+tw)-\phi(f)}{t} = \boxed{0 = \int_a^b \left(B(x) - \frac{dA}{dx}(x)\right) w(x)\,dx}$$

3. Cette dernière égalité vaut pour toute fonction w continue sur $[0,1]$, de classe C^2 sur $]0,1[$ et nulle hors de $[a,b]$. On peut choisir :

$$w = B - \frac{dA}{dx}$$

Les expressions de A et B trouvées en 2.c montrent qu'une telle fonction w satisfait aux conditions voulues. Alors :

$$\int_a^b \left(\left(B(x) - \frac{dA}{dx}(x)\right)^2 dx = 0\right.$$

L'intégrande étant continu et positif sur $[a,b]$ on en déduit :

$$B(x) - \frac{dA}{dx}(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [a,b]$$

Ceci valant pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $0<a<b<1$, on a bien :

$$\boxed{B(x) - \frac{dA}{dx}(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in]0,1[}$$

4. Pour tout $x \in]0,1[$:

$$\frac{dA}{dx}(x) = \frac{f''(x)(1+f'^2(x))^{1/2}(1-f(x))^{1/2}}{(1+f'^2(x))(1-f(x))}$$

$$\frac{-f'(x)(1-f(x))^{1/2}\times\frac{1}{2}\times(1+f'^2(x))^{1/2}\times 2\times f'(x)f''(x)}{(1+f'^2(x))(1-f(x))}$$

$$\frac{-f'(x)(1+f'^2(x))^{1/2}\times(-\frac{1}{2})\times f'(x)\times(1-f(x))^{-1/2}}{(1+f'^2(x))(1-f(x))}$$

$$\frac{dA}{dx}(x) = \frac{f''(x)(1+f'^2(x))(1-f(x)) - f'^2(x)(1-f(x))f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}(1-f(x))^{3/2}}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}f'^2(x)(1+f'^2(x))}{}$$

Ainsi la condition $B(x) = \frac{dA}{dx}(x)$ pour $x \in]0,1[$ est équivalente à (en simplifiant l'écriture) :

$2f''(1+f'^2)(1-f) - 2f'^2f''(1-f) + f'^2(1+f'^2) = 1+2f'^2+f'^4$

soit après développement et réduction :

$2f''(1-f) = 1+f'^2$. càd

$$\boxed{\text{f est solution sur }]0,1[\text{ de l'équation différentielle } 1+y'^2 = 2y''(1-y)}$$

5. Soit $T = (1-f)(1+f'^2)$ définie sur $\mathbb{I}0,1\mathbb{I}$.
Pour prouver que T est une fonction constante sur $]0,1[$, il suffit de constater que la dérivée de T est nulle sur cet intervalle.
or $\forall x \in]0,1[$ $\quad T' = 2f'f'' - f'(1+f'^2) - 2ff'f''$;
$T' = 2f'f''(1-f) - f'(1+f'^2)$;
$T' = f'(2f''(1-f) - (1+f'^2))$ donc $T' = 0$
d'après ce qui précède et :

$T = (1-f)(1+f'^2)$ est une fonction constante sur $]0,1[$

Au début de la partie D, f est supposée continue et strictement décroissante sur $[0,1]$, avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$; f est bien à valeurs dans $[0,1]$. Avec la question 5: $(1-f(x))(1+f'^2(x))$ est constante, avec $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$; $1+f'^2(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in]0,1[$.
$\exists\, A \geqslant 1$ tel que $(1-f(x))(1+f'^2(x)) = A$, càd
$\exists\, A \geqslant 1$ tel que $(1-f(x))(f'^2(x) = A - 1 + f(x)$.
On retrouve bien que f est solution sur $]0,1[$ de l'équation différentielle :

$$(1-y)y'^2 = 2C - 1 + y$$

à condition de poser $A = 2C$. Alors

$$A \geqslant 1 \iff C \geqslant \frac{1}{2}$$

f satisfait nécessairement aux conditions (I).

Partie E

1. Il est immédiat que $f_1 \in E$ ($\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est une intégrale convergente si et seulement si $\alpha < 1$).

$$\phi(f_1) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2} \times 2 \times [\sqrt{x}]_0^1 = \boxed{2\sqrt{2} = \phi(f_1)}$$

2.a.

Soit $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\gamma'(y)^2}}{\sqrt{1-y}}\,dy$. Cette intégrale existe bien, la convergence en 1 étant assurée par la racine carrée. Il suffit alors d'effectuer le changement de variable $x \longmapsto y = \Lambda(x)$ de $]0,1[$ sur $]0,1[$. Il est C^1, bijectif et ne s'annule pas. Avec $dy = \Lambda'(x)\,dx$ et $\gamma'(y) = \gamma'(\Lambda(x)) = \frac{1}{\Lambda'(x)}$, on a successivement :

$$I = \int_1^0 \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\Lambda'^2(x)}}}{\sqrt{1-\Lambda(x)}}\,\Lambda'(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+(\Lambda'(x))^2}}{\sqrt{1-\Lambda(x)}}\,dx = \phi(\Lambda)$$

(puisque $\Lambda'(x) < 0$ sur $]0,1[$).

Finalement : $$\boxed{\phi(\Lambda) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\gamma'(y)^2}}{\sqrt{1-y}}\,dy}$$

2.b. C'est un petit calcul de montrer qu'avec le changement de variable proposé :

$$\phi(\Lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\theta}} \int_\theta^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\theta}} [\operatorname{Arcsin} u]_\theta^1$$

or $\forall \theta \in [-1,1]$ $\arcsin\theta + \arccos\theta = \frac{\pi}{2}$, donc

$\phi(\Lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\theta}} \arccos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\theta}} (\sqrt{1-\theta^2} + 1 - \theta)$ par définition de θ. Donc :

$$\boxed{\phi(\Lambda) = \sqrt{2}(\sqrt{1-\theta} + \sqrt{1+\theta})}$$